Maths Juin 2023 / Session 2

Question de cours :

$\ln(e^x) = x \Rightarrow$ ln et exp fonctions réciproques

Intervalle de définition $\ln x$: $]0 ; +\infty[$ dérivable sur cet intervalle

$\ln(0)$ non défini ! $\Rightarrow$ (divergence en $-\infty$) ; $\ln 1 = 0$

Variation : fct croissante ; limites $\ln(x \to 0) = -\infty$
$\ln(x \to +\infty) = +\infty$

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$
$\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$

Vecteurs orthogonaux :

$\vec{u}\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}$ $\vec{v}\begin{vmatrix}6\\x+1\end{vmatrix}$ $\vec{u}\perp\vec{v}$: $1\times 6 + 3(x+1) = 0$
$6 + 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$\vec{u}\begin{vmatrix}2x-1\\2\end{vmatrix}$ $\vec{v}\begin{vmatrix}3x+2\\x+1\end{vmatrix}$ $\vec{u}\perp\vec{v}$: $(2x-1)(3x+2) + 2(x+1) = 0$
$6x^2 + 4x - 3x - 2 + 2x + 2 = 0$
$6x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0$
$x = -1/2$

Nombres complexes :

$$f(x) = \frac{1+j\tan x}{1-j\tan x} = \frac{(1+j\tan x)^2}{(1-j\tan x)(1+j\tan x)} = \frac{(1-\tan^2 x) + j\,2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

donc $Re(f(x)) = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et $Im(f(x)) = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

Module et argument $\Rightarrow$ on réécrit $f(x) = \dfrac{\cos x + j\sin x}{\cos x - j\sin x} = \dfrac{e^{jx}}{e^{-jx}} = e^{j2x}$

soit module $= 1$ et argument $2x$

$$f(x) = \frac{(1-\tan^2 x)}{(1+\tan^2 x)} + j\frac{2\tan x}{(1+\tan^2 x)} = e^{j2x} = \cos(2x) + j\sin(2x)$$

on en déduit $\cos(2x) = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

Dérivation :

$a(x) = -(2x-3)^4 \Rightarrow a'(x) = -4(2x-3)^3 \times 2 = -8(2x-3)^3$
$b(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow b'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

Utilisation de primitives connues :

$$C = \int_1^8 \frac{1}{V^\gamma}\,dV = \int_1^8 V^{-\gamma}\,dV = \left[\frac{V^{-\gamma+1}}{(-\gamma+1)}\right]_1^8 = \frac{8^{-\gamma+1} - 1}{(-\gamma+1)}$$

$$\text{si } \gamma = 1 \Rightarrow C = \int_1^8 \frac{1}{V}\,dV = [\ln V]_1^8 = \ln(8)$$

Equation différentielle :

$y'' + 2y' + y = 2$ $\rightarrow$ sol homogène // $y(x) = e^{rx} \Rightarrow y'(x) = r\,y(x)$ et $y''(x) = r^2 y(x)$

soit $r^2 + 2r + 1 = 0 = (r+1)^2 \Rightarrow$ racine double $r = -1$

$\Rightarrow$ forme spéciale $y_{SHE}(x) = a e^{-x} + b x e^{-x}$

rajout de la solution particulière $y_{SPE} = 2$ $\Rightarrow$ SGE : $y(x) = a e^{-x} + b x e^{-x} + 2$